

Tentamen i MSG110 Sannolikhetssteori, 7.5 högskolepoäng, Göteborgs Universitet.

Tid: Tisdagen den 27 Oktober 2015, kl. 8.30-12.30. Examinator: Olle Nerman .

Jour: Olof Elias, telefon: 076 2026293 , rum L3089, MV, Chalmers.

Hjälpmedel: Miniräknare, egen formelsamling (4 A4-sidor på 2 blad) och till skrivningen medhörande tabeller.

Betygsgränser: För betyget G fordras 12 poäng, för betyget VG 20 poäng.

1. Betrakta en diskret stokastisk variabel X med (kumulerade) fördelningsfunktionen

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{när } x \leq -1, \\ 0.1 & \text{när } x \in [-1, 0), \\ 0.5 & \text{när } x \in [0, 2) \text{ och} \\ 1 & \text{när } x \geq 2. \end{cases}$$

- a. Vad är sannolikhetsfunktionen (=diskreta frekvensfunktionen) för X ? (1p)
- b. Vad är väntevärdet och variansen för X ? (2p)
- c. Vad blir värdet av sannolikhetsfunktionen för summan av två oberoende stokastiska variabler med samma fördelning som X evaluerad i punkten $x=2$? (2p)
2. Du kastar två vanliga tärningar (med de vanliga utfallssidorna 1,2,...,6), en röd och en blå, och betraktar de tre händelserna A , att den blå tärningen får ett udda utfall, B att den röda tärningen får ett udda utfall och C att summan av de båda tärningarna får ett udda utfall. Visa att de tre möjliga paren (paret A,B , paret A,C och paret B,C) alla utgör par av oberoende händelser, men att de tre händelserna A,B,C inte utgör en tripplett av oberoende händelser. (3p)
3. Betrakta en Poissonfördelad stokastisk variabel X med väntevärdet **81**.
- a. Du skall uppskatta sannolikheten för händelsen att X är större än eller lika med **100** med hjälp av centrala gränsvärdessatsen. (När du gör det skall du helst använda en så kallad halv- eller halvtalskorrektion.) (2p)
- b. Hur uppskattar du sannolikheten för att $X=100$ med hjälp av en centrala gränsvärdes-approximation av sannolikheterna $P(X \geq 100)$ och $P(X > 100)$. (Nu måste du använda halvtalskorrektioner!) (2p)
4. Vid en jämförelse av vikterna för nyfödda barn vid en viss förlossningsklinik mellan två olika årtal, år 1990 och år 2000, uppmättes vikterna för **50** (slumpvalda) nyfödda flickor från vardera året. Stickprovsmedelvärdena blev **3.250** kg för de födda 1990 och **3.330** kg för de födda år 2000. De båda stickprovsstandardavvikelseerna blev **0.310** respektive **0.275** kg. Antag att de båda teoretiska varianserna är lika.
- a. Ge ett observerat symmetriskt konfidensintervall för de båda teoretiska flickmedelvikternas differens med approximativ konfidensgrad **95%** . (2p)
- b. Testa, med approximativ signifikansnivå **5%**, nollhypotesen att ingen systematisk förändring av medelvikten hos nyfödda flickor skett mellan de två årgångarna. Använd ett tvåsidigt test. Vad blir din slutsats? (Motivera svaret) (2p)
5. I en Poissonprocess $N(t)$ med intensiteten c så är som bekant $\hat{c} = N(t)/t$ en punktskattning av c för fixt t . Visa att

- a. denna punktskattning är väntevärdesriktig, (1p)
 - b. standarfelet av punktskattningen konvergerar mot **0** när $t \rightarrow \infty$, (1p)
 - c. att $P(|\hat{c} - c| > \epsilon) \rightarrow 0$, då $t \rightarrow \infty$. (Använd Chebyshevs olikhet på lämpligt sätt.) (2p)
6. En tvådimensionell stokastisk variabel har sannolikhetsstätheten **c g(x,y)** där **c** är en konstant och **g(x,y) = exp(-(3x+5y))** för $x > 0$ och $y > 0$ (och **g(x,y)=0** för övrigt).
- a. Bestäm konstanten **c**. (1p)
 - b. Bestäm de endimensionella sannolikhetsstätheterna för **X** respektive **Y**. (1p)
 - c. Bestäm frekvensfunktionen för **Z=X+Y**. (2p)
7. Antag att **X=(X₁,X₂,X₃)** är multinomialfördelad (**n=100, p₁=1/3,p₂=1/3, p₃= 1/3**).
Vad är (Motivera alla svaren)
- a. Variansen för **X₁**? (1p)
 - b. Variansen för **X₁+X₂**? (2p)
 - c. Variansen för **X₁-X₂**? (1p)
8. Du har två oberoende stickprov av storlek **7** resp **13** på två normalfördelningar med olika okända väntevärden. Redan i modellen antar att varianserna hänger ihop på ett sådant sätt att observationerna i det lilla stickprovet har dubbelt så stor varians som det stora, men i övrigt är varianserna inte kända.
- a. Använd de båda väntevärdena och variansen för variablerna i det lilla stickprovet som parametrar och skriv upp likelihoodfunktionen för observationerna. (1p)
 - b. Beräkna Maximum Likelihoodskattningen av parametrarna du infört i a-delen. (2p)

Lycka Till!